Линиями равного потенциала вследствие условия ортогональности являются прямые, выходящие из начала координат.

Как видно из рис. 28, радиальная составляющая силы $\mathbf{F}$ равна нулю, а трансверсальная представима формулой

$$F_\rho = \mathbf{F}\cdot \mathbf{e}_\theta^0 = C/\rho.$$

На основании этого работа силы $\mathbf{F}$ на перемещении $d\boldsymbol{\rho}$ такова:

$$\mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\rho} = \frac{C}{\rho}\,\mathbf{e}_\theta^0\cdot\left(\mathbf{e}_\rho^0\, d\rho + \mathbf{e}_\theta^0\, \rho\, d\theta\right) = C\,d\theta = dU,$$

откуда $U = C\theta + \mathrm{const}$, что представляет собой многозначную функцию. При обходе по замкнутому контуру вокруг начала координат n раз работа выражается формулой

$$A = 2\pi C n.$$

Вычислим ротацию $\mathbf{R} = \nabla \times \mathbf{F}$. Тогда получим

$$R_1 = R_2 = 0, \qquad R_3 = \frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} = \frac{C}{\rho^2} - \frac{2Cx_1^2}{\rho^4} + \frac{C}{\rho^2} - \frac{2Cx_2^2}{\rho^4} =$$

$$= \frac{2C}{\rho^2}\left(1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{\rho^2}\right) = 0.$$

Отсюда видно, что вектор $\mathbf{R} = 0$ всюду, за исключением начала координат. Сила $\mathbf{F}$ при $\rho \to 0$ неограниченно возрастает. Иначе говоря, в начале координат имеем особую точку. Если условиться не причислять эту точку к полю, то последнее становится двусвязным потенциальным полем с многозначным потенциалом. Рассмотренное поле физически может быть реализовано, если представить, что вдоль оси x_3 от $-\infty$ до $+\infty$ течет электрический ток I. Тогда напряженность магнитного поля

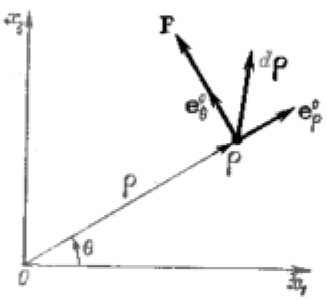

Рис. 28.

$$\mathbf{F} = \frac{C}{\rho^2}\left(\mathbf{e}_3^0 \times \boldsymbol{\rho}\right), \qquad (3.11)$$

где $C = I/c$, причем c есть постоянная, зависящая от выбора единиц, а $\rho = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$. Из (3.11) имеем

$$X_1 = -\frac{Cx_2}{\rho^2}, \qquad X_2 = \frac{Cx_1}{\rho^2}, \qquad X_3 = 0,$$

что совпадает с формулами (3.10).

До сих пор мы рассматривали потенциальное поле $U(x)$, которое явно не зависело от времени t. Такое поле называется *стационарным*. Если функция U, кроме того, явно зависит от t, то поле называется *нестационарным*. В этом случае

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial U}{\partial x_k}\, dx_k = dU - \frac{\partial U}{\partial t}\, dt,$$

и, следовательно,

$$A = U(t, x) - U(t_0, x_0) - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial U}{\partial t}\, dt,$$

и формула (2.10) принимает вид

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi(t, x) = \frac{mv_0^2}{2} + \Pi(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \Pi(t, x)}{\partial t}\, dt.$$

Для вычисления квадратуры необходимо знать функции $x_k(t)$, т. е. закон движения точки.

§ 4. Вывод уравнений Лагранжа второго рода при нестационарном базисе

В § 1 было установлено, что если положение точки задается криволинейными координатами q^σ, $\sigma = 1, 2, 3$, т. е. если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q)$, то уравнения динамики могут быть записаны в форме уравнений Лагранжа второго рода (1.5).

Рассмотрим теперь более общий случай, когда радиус-вектор $\mathbf{r}$ зависит не только от q^σ, но и явно от времени t, т. е. является функцией вида $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, q)$. Это, в частности, возможно, когда криволинейные координаты q^σ задают положение точки относительно системы координат, которая определенным образом перемещается относительно неподвижной (абсолютной) системы координат $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ (рис. 29). Радиус-вектор $\mathbf{r}$ даже при фиксированных значениях q^σ меняется в зависимости от времени вследствие переносного движения системы $Ox_1x_2x_3$.

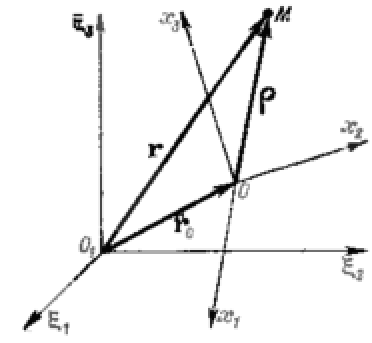

Рис. 29.

В рассматриваемом случае абсолютную скорость $\mathbf{v}$ вычисляем по формуле

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\sigma}\, \dot{q}^\sigma. \qquad (4.1)$$

Вводя для краткости записи обозначение $t = q^0$, получаем возможность выразить (4.1) следующим образом:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha}\, \dot{q}^\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, \quad \dot{q}^0 = 1. \qquad (4.2)$$

Подчеркнем, что такое представление вводится лишь для краткости записи и поэтому не переводит нас в четырехмерное пространство. Координатными векторами по-прежнему являются векторы

$$\mathbf{e}_\sigma(t,\ q)=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\sigma},\quad \sigma=1,\ 2,\ 3.$$

Таким образом, нестационарный базис меняется не только при переходе от точки к точке, но и в каждой точке с течением времени.

Вычислим ковариантную составляющую ускорения $\mathbf{w}$:

$$w_\sigma=\mathbf{w}\cdot\mathbf{e}_\sigma=\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\sigma}=\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\sigma}\right)-\mathbf{v}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\sigma}. \tag{4.3}$$

Дифференцируя выражение (4.1) по $\dot q^\rho$, а затем по q^ρ, $\rho=1,\ 2,\ 3$, имеем

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot q^\rho}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\rho},\quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q^\rho}=\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t\,\partial q^\rho}+\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^\sigma\,\partial q^\rho}\dot q^\sigma=\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\rho}.$$

Отсюда следует, что слагаемые, входящие в выражение (4.3), могут быть представлены в виде

$$\mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\sigma}=\mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot q^\sigma}=\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial \dot q^\sigma}=\frac{\partial T_1}{\partial \dot q^\sigma},$$

$$\mathbf{v}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\sigma}=\mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q^\sigma}=\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial q^\sigma}=\frac{\partial T_1}{\partial q^\sigma},$$

поэтому для w_σ окончательно получаем

$$w_\sigma=\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \dot q^\sigma}-\frac{\partial T_1}{\partial q^\sigma},\quad T_1=\frac{v^2}{2}. \tag{4.4}$$

Таким образом, лагранжева форма представления ковариантной составляющей w_σ не изменяется и для нестационарного базиса.

Кинетическая энергия точки в соответствии с выражением (4.2) имеет вид

$$T=\frac{mv^2}{2}=\frac{m}{2}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\beta}\dot q^\alpha\dot q^\beta=\frac{m}{2}g_{\alpha\beta}\dot q^\alpha\dot q^\beta,\quad \alpha,\ \beta=0,\ 1,\ 2,\ 3. \tag{4.5}$$

Если в данном выражении выделить слагаемые, явно содержащие $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^0}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$, то можно записать

$$T=T^{(2)}+T^{(1)}+T^{(0)},$$

где

$$T^{(2)}=\frac{m}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\rho}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\sigma}\right)\dot q^\rho\dot q^\sigma=\frac{m}{2}g_{\rho\sigma}\dot q^\rho\dot q^\sigma,$$

$$T^{(1)}=m\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\sigma}\right)\dot q^\sigma=mg_{0\sigma}\dot q^\sigma,$$

$$T^{(0)}=\frac{m}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right)^2=\frac{m}{2}g_{00}.$$

Отметим, что метрическими коэффициентами в данном случае являются только величины $g_{\rho\sigma}$, входящие в выражение для $T^{(2)}$.

Из формул (4.4) и (4.5) следует, что, умножая обе части уравнения Ньютона $m\mathbf{w}=\mathbf{F}$ скалярно на $\mathbf{e}_\sigma$, получаем уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q^\sigma}=Q_\sigma,\quad \sigma=1,\ 2,\ 3,\quad Q_\sigma=\mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_\sigma. \tag{4.6}$$

Если векторы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{e}_\sigma$ заданы своими компонентами в декартовых координатах, то Q_σ приобретает вид

$$Q_\sigma=X_i\frac{\partial x_i}{\partial q^\sigma}.$$

На практике для нахождения Q_σ удобно пользоваться следующим приемом. Введем вектор $\delta\mathbf{r}$, определяемый следующим образом:

$$\delta\mathbf{r}=\delta q^\sigma\mathbf{e}_\sigma=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\sigma}\delta q^\sigma,$$

где δq^σ — произвольные изменения координат q^σ, называемые *вариациями* q^σ. Отсюда видно, что $\delta\mathbf{r}$ есть дифференциал функции $\mathbf{r}$, вычисляемый при фиксированном t и называемый *вариацией вектор-функции* $\mathbf{r}$. Вычисляя элементарную работу δA силы $\mathbf{F}$ на перемещении $\delta\mathbf{r}$, имеем

$$\delta A=\mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_\sigma\delta q^\sigma=Q_\sigma\delta q^\sigma.$$

Это выражение представляет собой элементарную работу, вычисленную в криволинейных координатах. Каждое слагаемое данной суммы, например $Q_1\delta q^1$, есть работа силы $\mathbf{F}$ на перемещении $\delta\mathbf{r}_1=\delta q^1\mathbf{e}_1$. Последнее позволяет рассматривать обобщенную силу Q_σ как коэффициент при вариации δq^σ в выражении элементарной работы δA.

Если силовое нестационарное поле потенциально, т. е. если при любом t

$$\mathbf{F}=\nabla U(t,\ x),$$

то обобщенная сила Q_σ принимает вид

$$Q_\sigma=\mathbf{F}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}(t,\ q)}{\partial q^\sigma}=\nabla U(t,\ x)\cdot\frac{\partial \mathbf{r}(t,\ q)}{\partial q^\sigma}=\frac{\partial U(t,\ x)}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial q^\sigma}=\frac{\partial U(t,\ q)}{\partial q^\sigma}.$$

Отметим, что вектор градиента ∇U, как это следует из приведенных равенств, может быть записан следующим образом:

$$\nabla U(t,\ q)=Q_\sigma\mathbf{e}^\sigma=\frac{\partial U(t,\ q)}{\partial q^\sigma}\mathbf{e}^\sigma.$$

Установим теперь явный вид уравнений Лагранжа второго рода при нестационарном базисе. Подставляя выражение (4.5) в уравнения (4.6), получаем

$$m\,(g_{\sigma\tau}\ddot{q}^{\tau}+\Gamma_{\sigma,\,\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta})=Q_{\sigma},\quad \sigma,\tau=1,\,2,\,3,\quad \alpha,\beta=0,\,1,\,2,\,3,\quad (4.7)$$

где

$$\Gamma_{\sigma,\,\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial q^{\beta}}+\frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial q^{\alpha}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^{\sigma}}\right).$$

Суммы $\Gamma_{\sigma,\,\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}$ в уравнениях (4.7) могут быть записаны в следующем виде:

$$\Gamma_{\sigma,\,\alpha\beta}\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta}=\Gamma_{\sigma,\,\rho\tau}\dot{q}^{\rho}\dot{q}^{\tau}+2\Gamma_{\sigma,\,0\tau}\dot{q}^{\tau}+\Gamma_{\sigma,\,00}.$$

Двойная сумма, стоящая в правой части этого выражения, встречается в случае стационарного базиса. Сумма $2\Gamma_{\sigma,\,0\tau}\dot{q}^{\tau}$ и слагаемое $\Gamma_{\sigma,\,00}$ появляются вследствие нестационарности базиса. Отметим, что символами Кристоффеля первого рода являются только величины $\Gamma_{\sigma,\,\rho\tau}$.

§ 5. Получение интеграла энергии и интеграла Якоби из уравнений Лагранжа второго рода

Если силы, действующие на точку, имеют потенциал, явно не зависящий от времени, то, как было показано в § 2, уравнения движения имеют интеграл энергии (2.12). Покажем, что этот интеграл может быть получен непосредственно из уравнений Лагранжа второго рода в предположении, что базис является стационарным. При этом $Q_{\sigma}=\partial U/\partial q^{\sigma}$, а кинетическая энергия T представляет собой однородную квадратичную форму скоростей:

$$T=\frac{m}{2}\,g_{\sigma\tau}\dot{q}^{\sigma}\dot{q}^{\tau},$$

причем $g_{\sigma\tau}$ являются функциями только координат q^{σ}. Умножая уравнения Лагранжа второго рода на $\dot{q}^{\sigma}$ и суммируя по σ, получаем

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^{\sigma}}\right)\dot{q}^{\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q^{\sigma}}\dot{q}^{\sigma}=\frac{\partial U}{\partial q^{\sigma}}\dot{q}^{\sigma},$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^{\sigma}}\dot{q}^{\sigma}\right)-\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^{\sigma}}\ddot{q}^{\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q^{\sigma}}\dot{q}^{\sigma}=\frac{\partial U}{\partial q^{\sigma}}\dot{q}^{\sigma}.\qquad (5.1)$$

Так как T и U по предположению явно от времени не зависят, то выполняются равенства

$$\frac{dT(q,\,\dot{q})}{dt}=\frac{\partial T}{\partial q^{\sigma}}\dot{q}^{\sigma}+\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^{\sigma}}\ddot{q}^{\sigma},$$

$$\frac{dU(q)}{dt}=\frac{\partial U}{\partial q^{\sigma}}\dot{q}^{\sigma}.$$

На основании этого формулу (5.1) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^{\sigma}}\dot{q}^{\sigma}-T-U\right)=0.$$

Поскольку по теореме Эйлера об однородных функциях $\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^{\sigma}}\dot{q}^{\sigma}=2T$, получаем окончательно

$$\frac{d\,(T-U)}{dt}=0,$$

откуда

$$E\equiv T+\Pi=\text{const}.\qquad (5.2)$$

В общем случае нестационарной задачи имело бы место выражение

$$\frac{\partial T}{\partial q^{\sigma}}\dot{q}^{\sigma}+\frac{dT}{d\dot{q}^{\sigma}}\ddot{q}^{\sigma}=\frac{dT}{dt}-\frac{\partial T}{\partial t},$$

где

$$T=T^{(2)}+T^{(1)}+T^{(0)}.$$

Обращаясь к формуле (5.1), рассмотрим входящее в нее выражение $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^{\sigma}}\dot{q}^{\sigma}\right)$. Применяя теорему Эйлера к функциям $T^{(2)}$ и $T^{(1)}$, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^{\sigma}}\dot{q}^{\sigma}\right)=\frac{d}{dt}\,(2T^{(2)}+T^{(1)}).$$

В результате формула (5.1) может быть записана в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\,(2T^{(2)}+T^{(1)})-\frac{dT^{(2)}}{dt}-\frac{dT^{(1)}}{dt}-\frac{dT^{(0)}}{dt}+$$
$$+\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{dU}{dt}+\frac{\partial U}{\partial t}=0,$$

или

$$\frac{d\,(T^{(2)}-T^{(0)}-U)}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial T}{\partial t}.$$

Из нее видно, что если функции U и T явно не содержат t, то справедливо выражение

$$T^{(2)}-T^{(0)}+\Pi=\text{const},\qquad (5.3)$$

называемое *интегралом Якоби*. Этот интеграл наиболее часто используется при решении специальных задач небесной механики.

§ 6. Канонические уравнения

Уравнения Лагранжа второго рода, записанные в явном виде (4.7), представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет второй порядок.